

# Métodos Matemáticos II

## Grao en Física.

### 1.- Nocións básicas de Conxuntos e Aplicacións

#### *Introdución*

O contido destas notas pretende recoller os conceptos mínimos da teoría de conxuntos para poder abordar o estudio dos espazos vectoriais.

Consideramos que non ten sentido repetir n veces un mesmo procedemento, aínda que éste teña diferentes aparencias, cando é suficiente tratalo unha única vez baixo un marco mais xeral.

Empezamos con algunha noción básica da teoría de conxuntos e a continuación, introducimos o concepto de aplicación entre dous conxuntos e os tipos de aplicacións existentes.

Non se pretende facer un desenvolvemento matemático rigoroso, senón establecer a linguaxe que se usará no resto do curso. Para elo optaremos por un tratamento intuitivo e rápido. Un exemplo desto é a "definición" de conxunto.

#### *1.1. Conxuntos. Nocións básicas.*

##### **1.1.1. Definición. Como se define un conxunto.**

Un conxunto está ben definido cando se pode saber, sen ambigüidade, se un determinado elemento pertence ou non a dito conxunto; esto pode facerse de dúas maneiras:

a) *Por extensión*: Enumerando, un por un, todos os seus elementos (se é finito).

Escríbense todos os elementos que o constitúen, separados por comas, entre dúas "chaves" { ..... }. Por exemplo

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) **Por comprensión:** Enunciando as propiedades que caracterizan aos seus elementos (é dicir, as que verifican todos os seus elementos e só eles). Escríbese como sigue  $A = \{x / P(x)\}$  que se lee "A é o conxunto dos elementos x que verifican a propiedade P".

Por exemplo

$$A = \{x / x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 6\}$$

### 1.1.2. Nota.

Para designar aos conxuntos utilizaranse, xeralmente, letras maiúsculas, empregando as minúsculas para representar os elementos. Se  $A$  é un conxunto, para indicar que  $a$  é un elemento do conxunto  $A$  escribiremos  $a \in A$ , e diremos que  $a$  pertence a  $A$ . Escribiremos  $a \notin A$  se  $a$  non é un elemento do conxunto  $A$  e diremos que  $a$  non pertence a  $A$ .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{x / x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 6\}$$

son dúas formas de escribir o mesmo conxunto.

Vemos que  $5 \in A$  e  $8 \notin A$ .

### 1.1.3.- Exemplos:

O conxunto  $A$  formado polas letras vocais que se representará escribindo

$$A = \{a, e, i, o, u\} = \{x / x \text{ es una letra vocal}\}$$

O conxunto de todos os puntos da circunferencia de centro o orixe de coordenadas e de radio a unidade pode representarse escribindo

$$B = \{(x, y) / x \text{ e } y \text{ son números reais que verifican } x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ (Números naturais)}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \text{ (Números enteiros)}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \text{ (Números racionais)}$$

$$\mathbb{R} \text{ (Números reais)}$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} \text{ (Números complexos)}$$

### 1.1.4. Exemplos:

Calquera colección de obxectos como os puntos dun segmento dado, as rectas que pasan por un punto, os números naturais menores que dez, os empregados dunha empresa, os estudantes dunha escola, as páxinas dun libro,... son conxuntos. Os puntos, as rectas, os números, as páxinas,... son os elementos dos respectivos conxuntos.

Para designar aos conxuntos se utilizarán, xeralmente, letras maiúsculas, empregando as minúsculas para representar os elementos. Se  $A$  é un conxunto, para indicar que  $a$  é un elemento do conxunto  $A$  escribiremos  $a \in A$ , e diremos que  $a$  pertence a  $A$ .

Escribiremos  $a \notin A$  se  $a$  non é un elemento do conxunto  $A$  e diremos que  $a$  non pertence a  $A$ .

### 1.1.5.- Definición.

Dados dous conxuntos  $A$  e  $B$  diremos que  $A$  é un **subconxunto** de  $B$  se todo elemento de  $A$  tamén é un elemento de  $B$ . Se  $A$  es un subconxunto de  $B$ , escribiremos  $A \subset B$  (algúns autores escriben  $A \subseteq B$ ) e diremos que  $A$  é un subconxunto de  $B$ , que  $A$  está contido en  $B$ , que  $A$  está incluído en  $B$  ou que  $B$  contén a  $A$ , é dicir,

$$A \subset B : \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in B]$$

Evidentemente, todo conxunto  $A$  é un subconxunto de si mesmo.

### 1.1.6. Exemplos:

$$A = \{\text{Coruña, Lugo, Ourense, Pontevedra}\} \text{ e}$$

$$A = \{x / x \text{ é unha provincia galega}\}$$

son dúas formas de escribir o mesmo conxunto.

$$B = \{x / x \text{ é unha persoa que figura no padrón dun concello de Galicia}\}$$

$$D = \{x / x \text{ é unha persoa que figura no padrón dun concello de Ourense}\}$$

Se Luís é unha persoa empadroada en Ourense, entón

$$\text{Luís} \in D; \text{Luís} \in B; \text{Luís} \notin A; D \notin B;$$

$$\text{Coruña} \notin B; \text{Coruña} \in A; D \subset B; D \not\subset A.$$

Os elementos de  $A$  son provincias e  $A$  ten 4 elementos.

Os elementos de  $B$  e  $D$  son persoas.

Todos os elementos de  $D$  tamén son elementos de  $B$ .

### 1.1.7.- Definición.

Dous conxuntos  $A$  e  $B$  son iguais, e escríbese  $A = B$ , se todo elemento de  $A$  tamén o é de  $B$  e todo elemento de  $B$  tamén o é de  $A$ , é dicir,

$$A = B \Leftrightarrow [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

Se  $A$  e  $B$  non son iguais escribiremos  $A \neq B$ .

Notemos que podemos dicir que

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

que se lee:

A é igual a B se, e só se, A está incluído en B e B está incluído en A.

### 1.1.8. Nota.

Se A é un subconxunto de B pero  $A \neq B$  diremos que A es un subconxunto propio de B ou que A está contido estritamente en B.

Se A non é un subconxunto de B, entónces existe ao menos un elemento de A que non é elemento de B e escribiremos  $A \not\subset B$ .

### 1.1.9. Exemplo.

Observemos que no caso dos conxuntos numéricos habituais temos que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**1.1.10.- Definición.-** Admitiremos que existe un conxunto que non ten ningún elemento, a este conxunto chamáremolo **conxunto baleiro** e denótase por  $\emptyset$ .

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \emptyset &= \{n \in \mathbb{N} / n \neq n\} = \\ &= \{\text{persoas nadas na lúa en 1997}\} = \\ &= \{n \in \mathbb{Z} / n < 0 \text{ e } n > 0\}. \end{aligned}$$

Para calquera conxunto A,  $\emptyset \subset A$ . (Por redución ao absurdo, si  $\emptyset \not\subset A$ , entónces  $\exists x \in \emptyset, x \notin A$ , contradición coa definición de  $\emptyset$ ).

### 1.1.11.- Táboa de símbolos matemáticos:

Símbolo	Nome	Exemplo de uso
$\forall$	Para todo	$x \geq 0, \forall x \in \mathbb{N}$ .
$\exists$	Existe	$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} / y > x$ .
$\exists!$	Existe un único	$\forall x \in \mathbb{N}, \exists ! y \in \mathbb{N} / y = x + 1$ .
$\Leftrightarrow$	Se, e só se,	$\forall x, y \in \mathbb{N}, x > y \Leftrightarrow y < x$ .
/	Tal que	$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} / y > x$ .
$\in$	Pertence	$a \in \{a, e, i, o, u\}$
$\notin$	No pertence	$1 \notin \{a, e, i, o, u\}$
$\subset$	Contido en	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
$\not\subset$	Non contido en	$\{a, e, i, l, 5\} \not\subset \mathbb{N}$
$\subsetneq$	Contido pero distintos	$\{7, 14, 21, 28\} \subsetneq \mathbb{N}$
$\cup$	Unión	$\{a, e, i, o, u, 1\} \cup \{1, 3, a\} =$ $= \{1, 3, a, e, i, o, u\}$
$\cap$	Intersección	$\{a, e, 3, i, 4, o, u\} \cap \{1, 3, a, u\} =$ $= \{3, a, u\}$
$\phi$	Conxunto baleiro	$\phi = \{ \}$
$\mathbb{N}$	Conxunto dos números naturais	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . $-2 \notin \mathbb{N}$ .
$\mathbb{Z}$	Conxunto dos números enteiros	$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$ , $(2/3) \notin \mathbb{Z}$ .
$\mathbb{Q}$	Conxunto dos números racionais,	$\mathbb{Q} = \{a/b, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ , $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	Conxunto dos números reais	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ , $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	Conxunto dos números complexos	$\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1}, a, b \in \mathbb{R}\}$ .
$\infty$	Infinito	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
$\sum$	Sumatorio	$\sum_{\substack{n=1 \\ n \in \mathbb{N}}}^{10} n = 55$
$\prod$	Produto	$\prod_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n=1}}^5 n = 5! = 120$

## 1.2.- Operacións entre conxuntos. unión e intersección.

### 1.2.1.- Definición.

Sexan A e B subconxuntos dun conxunto U. Defínese a **unión** dos conxuntos A e B, denotada por  $A \cup B$ , como o conxunto

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Defínese a **intersección** de A e B, denotada por  $A \cap B$ , como o conxunto

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Para  $A \subset U$ , entónces U-A chámase o **complemento** (ou complementario) de A en U e denotamos por  $\bar{A}$  ao conxunto formado por todos os elementos de U que non pertencen a A.

$$\bar{A} = \{x \in U / x \notin A\}$$

Para A e B subconxuntos de U, defínese a **diferenza** de A e B, denotada por A-B, como o conxunto

$$A-B = \{x \in U / x \in A, x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

Dise que A e B son conxuntos **disxuntos** se  $A \cap B = \phi$

### 1.2.2.- Exemplo.

Sexan  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{a, b, e, f\}$  ( $U = \{a, b, c, d, e, f, g, \dots\}$  (alfabeto)), entónces

$$A \cup B = \{a, b, c, e, f\}$$

$$A \cap B = \{a, b\}$$

$$A-B = \{c\}$$

$$B-A = \{e, f\}$$

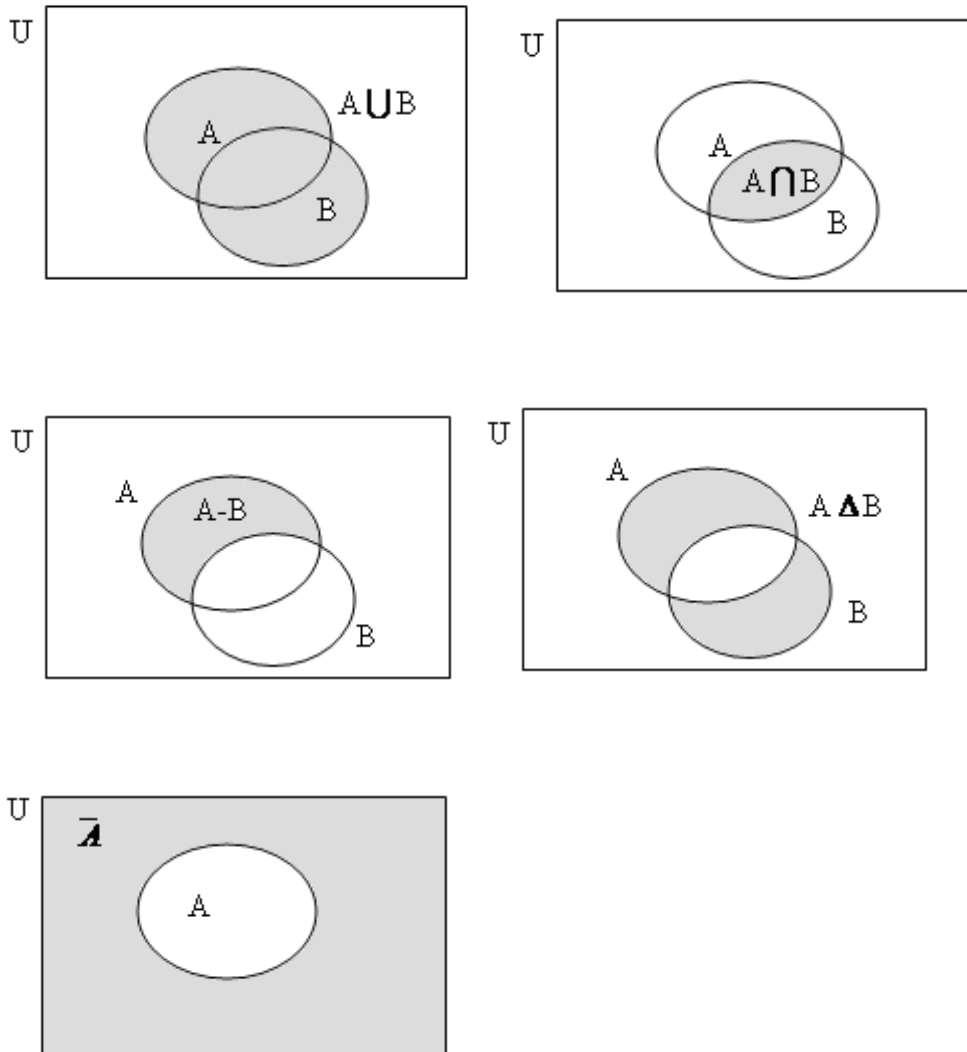
### 1.2.3. Nota.

Para ilustrar as operacións entre conxuntos úsanse a miúdo os “**Diagramas de Venn**”.

Os diagramas de Venn son representacións gráficas moi útiles na representación de conxuntos, esencialmente consisten en representar os conxuntos mediante áreas planas dentro dun rectángulo que representa o conxunto universal. Estes diagramas non teñen validez para facer demostracións pero moitas veces serven para facernos unha idea intuitiva do problema.

### 1.2.4. Exemplo.

Se consideramos os conxuntos A e B, dentro dun conxunto U, podemos representar os conxuntos unión e intersección dos conxuntos A e B, a diferenza A-B de A e B, a diferenza simétrica de A e B ou conxunto complementario de A mediante os diagramas de Venn:



Da definición anterior séguense facilmente las seguintes propiedades:

**1.2.5. Proposición.-** Sexan A, B e C conxuntos. Entónces

- 1)  $A \cup A = A = A \cap A$  (Idempotencia)
- 2)  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$  (Commutatividade)

- 3)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (Asociatividade)
- 4)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (Propiedade distributiva da unión con respecto á intersección);  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (Propiedade distributiva da intersección con respecto á unión)
- 5) Se consideramos os conxuntos A e B, dentro dun conxunto Y e, para  $X \subset Y$ ,  $\overline{X}$  denota o complementario de X en Y, entón
- $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (\text{Leis de Morgan})$$
- 6)  $A \cup (B \cap A) = A$ ;  $A \cap (B \cup A) = A$  (Simplificación)

Por 3), podemos eliminar os parénteses e escribiremos  $A \cup B \cup C$  para denotar, sen ambigüidade, a unión dos conxuntos A, B e C. Ademais, é claro que  $A \cup B \cup C$  consiste de todos os elementos que pertencen a lo menos a un dos conxuntos A, B ou C. Analogamente para  $A \cap B \cap C$ , a intersección de A, B e C, que é o conxunto dos elementos que pertencen simultaneamente a A, a B e a C.

### 1.2.6.- Definición.

Chámase **produto cartesiano** ou simplemente produto dos conxuntos A e B, ao conxunto que denotaremos por  $A \times B$ , formado por todos os pares ordenados (a, b) onde  $a \in A$  e  $b \in B$ .

$$A \times B := \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$$

Dous pares ordenados (a, b) e (a', b') son iguais se, e só se,  $a = a'$  e  $b = b'$ .

Dado o par ordenado (a, b) diremos que a é a súa primeira compoñente é a e que b é a súa segunda compoñente.

En particular, se  $A = B$  podemos denotar  $A \times A = A^2$ .

### 1.2.7.- Exemplos:

1.- (3, 4) é un par ordenado. A súa primeira compoñente é 3 e a segunda é o 4.

$$(3, 4) \neq (4, 3)$$

Non podemos confundir (a, b) con {a, b};

{a, b} = {b, a}. {3, 4} = {4, 3} é o conxunto formado polos elementos 3 e 4.

Sen embargo, se  $a \neq b$  entón

$(a, b) \neq (b, a)$ .

2.- Sexa  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{r, s\}$ , entónces

$A \times B = \{(a, r), (a, s), (b, r), (b, s), (c, r), (c, s)\}$ .

3.- Para calquera conxunto  $C$ ,  $C \times \emptyset = \emptyset$ .

### 1.2.8.- Exercicio.

1) Se  $A$  ten  $n$  elementos e  $B$  ten  $m$  elementos, entónces  $A \times B$  ten  $mn$  elementos.

2) Si  $A \neq B$ ;  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ , entónces  $A \times B \neq B \times A$ .

### 1.2.9.- Definición.

Ao igual que os conxuntos ordenados de dous elementos (pares ordenados) pódense definir conxuntos ordenados de 3, 4, ..., en xeral de  $n$  elementos, chamados ternas, cuaternas, ...,  $n$ -éplas, respectivamente.

$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow [a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n]$

Xeneralizando o concepto de produto cartesiano de dous conxuntos, defínese o **produto cartesiano de  $n$  conxuntos**  $A_1, \dots, A_n$  como o conxunto  $A_1 \times \dots \times A_n$  formado polas  $n$ -éplas ordeadas  $(a_1, \dots, a_n)$  tales que  $a_i \in A_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) / a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

En particular escribiremos  $A \times \dots \times A = A^n$ .

### 1.3.- Aplicacións.

#### 1.3.1.- Definición.

Sexan A e B conxuntos. Unha **aplicación** f de A en B é unha relación entre A e B tal que, para cada elemento  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  (un e só un), chamado imaxe de  $a$  por f, tal que f relaciona  $a$  con  $b$ .

Se f é unha aplicación de A en B, escribiremos  $f: A \rightarrow B$  ou  $A \xrightarrow{f} B$  e chamaremos a A **dominio** de f e a B **rango** de f. Se  $a \in A$  e  $b \in B$  é a imaxe de  $a$  por f, escribiremos

$$b = f(a) \quad (\forall a \in A, \exists b \in B / f(a) = b).$$

O subconxunto de B formado polos elementos que son imaxe de algún elemento de A por f chámase **imaxe** de f e nótase por  $\text{Im}(f)$  ou  $f(A)$ , é dicir,

$$\text{Im}(f) := \{b \in B / \exists a \in A, b = f(a)\} \subset B.$$

#### 1.3.2.- Exemplos:

1.-  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ . É unha aplicación.

O dominio desta aplicación é  $\mathbb{R}$  e o rango tamén é  $\mathbb{R}$ .

A imaxe de  $3 \in \mathbb{R}$  é 10 ( $f(3) = 10$ ); a imaxe de  $-3 \in \mathbb{R}$  tamén é 10 ( $f(-3) = 10$ ); a imaxe de  $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$  é 8.

$$\text{Im}(f) = \{b \in \mathbb{R} / \exists a \in \mathbb{R}, b = f(a)\} = \{b \in \mathbb{R} / \exists a \in \mathbb{R}, b = a^2 + 1\} = \{b \in \mathbb{R} / b \geq 1\} \subset \mathbb{R}.$$

2.- Denotamos por  $\mathbb{R}^+$  os números reais non negativos.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \sqrt{x}$  ( $f(x) = y / y^2 = x$ ), non é unha aplicación xa que os números reais negativos non teñen imaxe.

3.-  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \sqrt{x}$  ( $f(x) = y / y^2 = x$ ). É unha aplicación.

É claro que o único que cambia, con respecto a anterior, é o dominio. Como os números reais non negativos ten unha única raíz cuadrada real non negativa, esta correspondencia é unha aplicación e a anterior non.

4.-  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $f(x) = y / y^2 = x$ ). Non é unha aplicación xa que cada número real positivo tería asociadas dúas imaxes, unha positiva e outra negativa.

5.-  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x, 2x + y, x + y)$ . É unha aplicación.

6.-  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (x - y, 2x + z)$ . É unha aplicación.

7.- Si  $A$  é un conxunto, chámase aplicación **identidade** de  $A$  e denótase por  $\mathbb{I}_A$  a aplicación  $\mathbb{I}_A: A \rightarrow A$  tal que  $\mathbb{I}_A(a) = a$ ,  $\forall a \in A$ .

8.- Si  $A$  é un conxunto, e  $B$  un subconxunto de  $A$  chámase aplicación **inclusión** de  $B$  en  $A$ , e denótase por  $i$ , á aplicación  $i: B \rightarrow A$  tal que  $i(b) = b$ ,  $\forall b \in B$ .

9.- Se  $A$  e  $B$  son conxuntos e  $b \in B$  é un elemento fixo de  $B$ , a aplicación  $\gamma_b: A \rightarrow B$  dada por  $\gamma_b(a) = b$ ,  $\forall a \in A$ , dise que é unha aplicación **constante**.

### 1.3.3.- Definición.

Sexan  $A$  e  $B$  conxuntos e  $f: A \rightarrow B$  unha aplicación.

Se  $A_1$  é un subconxunto non baleiro de  $A$ , chámase **imaxe** de  $A_1$  por  $f$ , e denótase  $f(A_1)$ , ó subconxunto de  $B$  formado polas imaxes por  $f$  dos elementos de  $A_1$ , é dicir,

$$f(A_1) := \{f(c) / c \in A_1\}.$$

Se  $A_1 = \emptyset$ ,  $f(A_1) = \emptyset$ .

Se  $B_1$  é un subconxunto de  $B$ , chamaremos **imaxe inversa** (ou recíproca) de  $B_1$  por  $f$ , e representarémola por  $f^{-1}(B_1)$ , ó subconxunto de elementos de  $A$  cuxa imaxe por  $f$  é un elemento de  $B_1$ , así

$$f^{-1}(B_1) := \{a \in A / f(a) \in B_1\}$$

Como no caso anterior  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ . Pode suceder  $B_1 \neq \emptyset$ ,  $f^{-1}(B_1) = \emptyset$ .

### 1.3.4.- Exemplo

Consideramos a aplicación  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x, 2x + y, x + y)$ .

$A = \{(2, 3), (3, 1)\}$ ,  $B_1 = \{(1, 3, 2), (2, 7, 5)\}$ ,  $B_2 = \{(1, 3, 0), (2, 1, 5)\}$ .

Calcula  $f(A)$ ,  $f^{-1}(B_1)$ ,  $f^{-1}(B_2)$ .

**Solución.**

$$f(\mathbf{A}) = \{f(2, 3), f(3, 1)\} = \{(2, 7, 5), (3, 7, 4)\}.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{B}_1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (1, 3, 2) \text{ ou } f(x, y) = (2, 7, 5)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, 2x + y, x + y) = (1, 3, 2) \text{ ou } (x, 2x + y, x + y) = (2, 7, 5)\}. \end{aligned}$$

En consecuencia  $f^{-1}(\mathbf{B}_1)$  está constituído polas solucións dos dous sistemas

$$\begin{array}{ll} x = 1 & x = 2 \\ 2x + y = 3 & 2x + y = 7 \\ x + y = 2 & x + y = 5 \end{array}$$

O sistema

$$\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}$$

é un S.C.D. e a única solución é (1, 1).

O sistema

$$\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{array}$$

é un S.C.D. e a única solución é (2, 3).

En consecuencia  $f^{-1}(\mathbf{B}_1) = \{(1, 1), (2, 3)\}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{B}_2) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (1, 3, 0) \text{ ou } f(x, y) = (2, 1, -1)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, 2x + y, x + y) = (1, 3, 0) \text{ ou } (x, 2x + y, x + y) = (2, 1, -1)\}. \end{aligned}$$

En consecuencia  $f^{-1}(\mathbf{B}_2)$  está constituído polas solucións dos dous sistemas

$$\begin{array}{ll} x = 1 & x = 2 \\ 2x + y = 3 & 2x + y = 1 \\ x + y = 0 & x + y = -1 \end{array}$$

O sistema

$$x = 1$$

$$2x + y = 3$$

$$x + y = 0$$

é un S.I.

O sistema

$$x = 2$$

$$2x + y = 1$$

$$x + y = -1$$

é un S.C.D. e a única solución é (2, -3).

En consecuencia  $f^{-1}(B_2) = \{(2, -3)\}$

### 1.3.5.- Exercicio.

Consideramos a aplicación  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (x - y, 2x + z)$ .

$A = \{(2, 3, 1), (3, 1, 1)\}$ ,  $B_1 = \{(1, 3), (2, 7)\}$ ,  $B_2 = \{(1, 3)\}$ .

Calcula  $f(A)$ ,  $f^{-1}(B_1)$ ,  $f^{-1}(B_2)$ .

### 1.3.6.- Proposición.

Sexa  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación e  $A, B$  subconjuntos de  $X$  e  $C, D$  subconjuntos de  $Y$ .

Entón verifícanse as seguintes propiedades:

- 1) Se  $A \subseteq B$ , entón  $f(A) \subseteq f(B)$
- 2)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ;  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$  (Non ten porque darse a igualdade)
- 3) Se  $C \subseteq D$ , entón  $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$
- 2)  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ ;  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$  (Dase a igualdade)

### Solución.

É de fácil demostración.

### 1.3.7.- Nota.

Consideremos a seguinte situación: Temos  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$ , aplicacións.

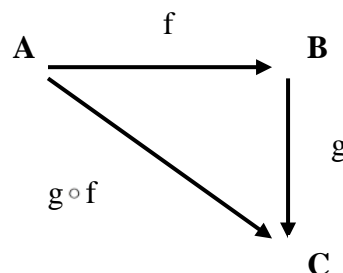
¿Podemos compoñer estas aplicacións para obter unha aplicación de  $A$  en  $C$ ? A forma mais natural e obvia de facer isto é enviar un elemento dado  $x \in A$  en dúas etapas a  $C$ , primeiro aplicando  $f$  a  $x$  e despois aplicando  $g$  ó elemento resultante  $f(x) \in B$ . Esta é a base da seguinte definición:

### 1.3.8.- Definición.

Sexan  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$  aplicacións (é dicir  $f$  e  $g$  dúas aplicacións tales que o dominio de  $g$  coincide co rango de  $f$ ). Chámase aplicación **composición** de  $f$  con  $g$  á aplicación  $g \circ f: A \rightarrow C$  definida por

$$(g \circ f)(a) := g(f(a)), \quad \forall a \in A$$

Isto exprésase dicindo que o diagrama



é conmutativo.

### 1.3.9.- Exemplos:

1.- Sexan  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

$$f(x) = x+3, \quad g(x) = x^2.$$

Entón,  $g \circ f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f \circ g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

con  $(g \circ f)(x) = (x + 3)^2$  e  $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$

**Nótese que aínda que se poidan facer as dúas composicións, en xeral,  $(g \circ f) \neq (f \circ g)$**

En efecto neste exemplo

$$(g \circ f)(5) = g(5 + 3) = 8^2 = 64$$

$$(f \circ g)(5) = f(5^2) = 25 + 3 = 28$$

2. Sexa  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x, 2x + y, x + y)$ ,  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x, y, z) = (x, 2z - y)$ .

Entón  $g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \circ g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con

$$(g \circ f)(3, 4) = g(3, 10, 7) = (3, 4).$$

En xeral

$$(g \circ f)(x, y) = g(x, 2x + y, x + y) = (x, 2(x + y) - (2x + y)) = (x, y).$$

Vemos que  $(g \circ f)$  é a identidade de  $\mathbb{R}^2$ .

$$(f \circ g)(3, 10, 7) = f(3, 4) = (3, 10, 7)$$

$$(f \circ g)(3, 2, 1) = f(3, 0) = (3, 6, 3)$$

Vemos que para estas dúas aplicacións en xeral  $(f \circ g)(x, y, z) \neq (x, y, z)$

3.- Dados dous conxuntos A e B e dúas aplicacións arbitrarias

$$f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow A,$$

tense que

$$f \circ \mathbb{I}_A = f, \mathbb{I}_A \circ g = g.$$

Hai ocasións en que unha aplicación goza de certas propiedades especiais que a fan particularmente sinxela de manexar; imos considerar tres tipos de aplicacións.

### 1.3.10.- Definición.

Unha aplicación  $f: A \rightarrow B$  dise que é

(a) **inxectiva** se  $[a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'), \forall a, a' \in A]$  ou equivalentemente,

$$[f(a) = f(a') \Rightarrow a = a', \forall a, a' \in A].$$

(b) **supraxeectiva** (sobre ó sobrexectiva) se, para cada  $b \in B$  existe  $a' \in A$  (non necesariamente único) tal que  $b = f(a)$ , é dicir, se  $f(A) = B$ .

(c) **bixectiva** cando é supraxeectiva e inxectiva.

### 1.3.11.- Exemplos:

1.-  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = x + 3$  é bixectiva.

2.-  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(x) = x+3$  non é bixectiva, é inxectiva pero non é sobrexectiva pois  $(0, 1, 2 \in \mathbb{N}, 0, 1, 2 \notin \text{Img } g)$ .

3.-  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x^2$  non é inxectiva nin supraxectiva.

4.- Para calquera conxunto  $A$ ,  $\mathbb{I}_A$  é aplicación bixectiva.

Para as aplicacións, sempre que as composicións requiridas teñan sentido, verifícase unha propiedade asociativa xeral:

### 1.3.12.- Proposición.

Se  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  $h: C \rightarrow D$  son aplicacións, entón  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

#### Demostración.

Dominio de  $h \circ g = \text{rango de } g \Rightarrow h \circ g$  está definida e o dominio de  $h \circ g$  é  $B$ .

Posto que dominio de  $h \circ g = \text{rango de } f \Rightarrow (h \circ g) \circ f$  está definida.

Analogamente, está definida a aplicación  $h \circ (g \circ f)$  e ambas composicións teñen o mesmo dominio e o mesmo rango.

Vexamos que actúan da mesma forma sobre calquera elemento  $a \in A$ . En efecto:

$$\forall a \in A, [(h \circ g) \circ f](a) = (h \circ g)[f(a)] = h[g(f(a))] = h[(g \circ f)(a)] = [h \circ (g \circ f)](a)$$

### 1.3.14.- Definición.

Sexa  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación e  $A \subset X$ . Se  $i: A \rightarrow X$  é a aplicación inclusión de  $A$  en  $X$ , entón a aplicación  $f|_A = f \circ i: A \rightarrow Y$  chámase aplicación restricción de  $f$  a  $A$ . (É dicir, os elementos do subconxunto  $A$  ten a mesma imaxe mediante  $f$  e  $f|_A$  pero non ten o mesmo dominio).

**1.3.15.- Proposición.-** Sexan  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$  aplicacións.

i) Se  $f$  e  $g$  son inxectivas, entón  $g \circ f$  es inxectiva.

ii) Se  $g \circ f$  é inxectiva, entón  $f$  é inxectiva.

Demostración.

i) Supoñamos  $a, a' \in A / (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Rightarrow g[f(a)] = g[f(a')] \Rightarrow f(a) = f(a') \text{ (pois } g \text{ é inxectiva)} \Rightarrow a = a' \\ \text{(pois } f \text{ é inxectiva).}$$

ii) Supoñamos  $a, a' \in A / f(a) = f(a')$

$$f(a) = f(a') \Rightarrow g[f(a)] = g[f(a')] \Rightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Rightarrow a = a' \text{ (pois } g \circ f \text{ é} \\ \text{inxectiva).}$$

**1.3.16.- Proposición.-** Sexan  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$  aplicacións.

i) Se  $f$  e  $g$  son supraxectivas, entón  $g \circ f$  es supraxectiva.

ii) Se  $g \circ f$  es supraxectiva, entón  $g$  é supraxectiva.

Demostración.

i) Sexa  $c \in C$ . Por ser  $g$  sobre  $\exists b \in B / c = g(b)$  e por ser  $f$  sobre  $\exists a \in A / b = f(a)$ . Así,

$a \in A$  é tal que  $(g \circ f)(a) = c$  e  $g \circ f$  é sobre.

ii) Sexa  $c \in C$ . Por ser  $g \circ f$  sobre  $\exists a \in A / c = (g \circ f)(a)$ . Así  $c = g(f(a))$  e se tomamos  $b = f(a)$ , vemos que para  $c \in C$ ,  $\exists b \in B / c = g(b)$

Como consecuencia das proposicións anteriores tense que

**1.3.17.- Corolario.-** Si  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  son aplicacións. Entón

i)  $f, g$  bixectivas  $\Rightarrow g \circ f$  bixectiva

ii)  $g \circ f$  bixectiva  $\Rightarrow f$  inxectiva e  $g$  supraxectiva.

### 1.3.18.- Definición.

Sexa  $f: A \rightarrow B$  unha aplicación. Una aplicación  $g: B \rightarrow A$  dise que é a **inversa** de  $f$  se  $g \circ f = \mathbf{I}_A$  e  $f \circ g = \mathbf{I}_B$ .

### 1.3.19.- Nota.

Se  $f$  ten inversa, entonces esta é única. En efecto, se  $g$  e  $g'$  son inversas de  $f$ , é decir  $g, g': B \rightarrow A$  son tales que  $g \circ f = g' \circ f = \mathbf{I}_A$  e  $f \circ g = f \circ g' = \mathbf{I}_B$ , entonces  $g' = \mathbf{I}_A \circ g' = (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ \mathbf{I}_B = g$ .

A **aplicación inversa** de  $f$ , se a ten, denotase por  $f^{-1}$ .

O problema que nos prantexamos agora é saber cales son as aplicacións que ten inversa. A resposta está dada por:

### 1.3.20.- Teorema.

Unha aplicación  $f: A \rightarrow B$  é bixectiva se, e só se, ten inversa.

#### **Demostración.**

" $\Rightarrow$ " Posto que  $f$  es bixectiva, dado  $b \in B$ ,  $\exists a \in A / f(a) = b$ , (por ser  $f$  sobre) Ademais, por ser  $f$  inyectiva este  $a \in A$  que existe é único.

É obvio que  $g: B \rightarrow A$  definida por  $g(b) = a$ , é aplicación e cumpre que  $g \circ f = \mathbf{I}_A$  e  $f \circ g = \mathbf{I}_B$ .

Así,  $g$  é a inversa de  $f$ .

" $\Leftarrow$ " Sexa  $f^{-1}: B \rightarrow A$  a aplicación inversa de  $f$ ,  $f \circ f^{-1} = \mathbf{I}_B$ ,  $f^{-1} \circ f = \mathbf{I}_A$

$f \circ f^{-1} = \mathbf{I}_B$ ,  $\mathbf{I}_B$  sobre  $\Rightarrow f$  sobre (e  $f^{-1}$  inyectiva por ser  $\mathbf{I}_B$  inyectiva)

$f^{-1} \circ f = \mathbf{I}_A$ ,  $\mathbf{I}_A$  inyectiva  $\Rightarrow f$  inyectiva (e  $f^{-1}$  sobre por ser  $\mathbf{I}_A$  sobre)